

DETERMINACION DE INCERTIDUMBRES DE MEDICION

Angel E. Lamor /Carlos Calbet

Kobe Argentina / Instituto Nacional de Tecnología Industrial.

INTRODUCCION:

La norma ISO 9001, en su punto 4.11 hace especial referencia a que "los equipos de inspección, medición y ensayo, deben utilizarse de modo tal que se asegure que la incertidumbre de medición es conocida y consistente con la capacidad de medición requerida.

Basados en lo expuesto en la norma ISO / TAG 4 / WG 3 / 92 "Guía para la expresión de la incertidumbre de medición" DIN 1319, Conceptos fundamentales para la técnica de medición; DIN 2257, Conceptos de la técnica de control de longitudes, y el WECC, documento N° 19/1990 "Directivas para la expresión de la incertidumbre de medición en calibraciones", se desarrolló un método para el cálculo de la misma, que tiene en cuenta la incertidumbre de calibración de los patrones utilizados y la incertidumbre propia del instrumento a calibrar.

Este método fue aprobado y reconocido por el Instituto Nacional de Tecnología Industrial y es el que aplica actualmente el Laboratorio de Metrología de Kobe Centrilift Argentina.

El trabajo aclara conceptos básicos sobre Incertidumbre, Error y Propagación de errores, explica el método utilizado y expone ejemplos de aplicación para la calibración de distintos tipos de instrumentos.

DESARROLLO:

Medir es el proceso experimental por el cual se determina un valor especial de una magnitud física como múltiplo de una unidad o de un valor de referencia.

El proceso de valoración de los valores medidos hasta determinar el resultado de la medición, está incluido dentro del concepto de Medir.

La magnitud de medida es la magnitud física que sirve para la medición. Ej.: longitud, fuerza, temperatura.

El valor de la medida se indica como el producto del valor numérico y la unidad Ej. 3m; 6s; 5,2A; 20°C.

En los valores de medida hay que diferenciar los valores de medida resultantes (leídos) sin corregir y los valores de medida corregidos según las diferencias sistemáticas apreciadas.

El resultado de una medición representa el valor de la magnitud de medida buscada con una incertidumbre de medición, que debe determinarse a partir de los valores medidos y otras informaciones, es por ello que no es posible encontrar el valor verdadero de la magnitud.

La indicación completa del resultado de la medición, incluye la correspondiente incertidumbre de medición o inseguridad de medición.

Un objeto a medir es el soporte de la magnitud física cuyo valor quiere determinarse, pudiendo ser cuerpos, procesos o estados. Por ej., en la medición de la temperatura del aire, el objeto a medir es el aire (cuerpo).

En la medición de la potencia de una radiación electromagnética, el objeto es la radiación (proceso).

En la medición de la densidad de flujo de un campo magnético, el objeto será el campo magnético (estado).

En toda magnitud a medir tenemos otras magnitudes, que no son objeto de la medición, pero que presentan influencia en ella, originando diferencias sistemáticas en los valores de medida.

Principios Fundamentales

El objetivo de una medición no es otro que determinar el valor verdadero de una magnitud. Debido a las influencias que hay presentes en una medición y que producen diferencias de medida, no hay posibilidades de encontrar el valor verdadero de dicha magnitud.

Si partimos imaginariamente de la base de que los valores obtenidos al realizar varias mediciones individuales dentro de una serie de mediciones, donde los valores de medida X , son relaciones de una magnitud aleatoria X . Dicha magnitud aleatoria X sigue una distribución de probabilidades caracterizada por dos parámetros designados como valor esperado μ y diferencia standard σ . Cuando no se dan diferencias sistemáticas, el valor esperado μ coincidirá con el valor verdadero X_w de la magnitud a medir. La diferencia

standard σ es una medida de dispersión para la diferencia casual de un valor de medida individual con respecto al valor esperado de la magnitud medida.

Los parámetros μ , σ y la distribución de probabilidades, resultan por lo general desconocidos. Por ello debemos determinar sus valores estimados en base a una serie de mediciones.

Suele emplearse el promedio aritmético $\bar{X}$ como valor estimado de μ y la diferencia standard S de una serie de mediciones como valor estimado de σ

Si partimos de la hipótesis del tipo de distribución de los valores medidos (presuponemos una distribución normal), se podrá indicar con la ayuda de $\bar{X}$ y de S una zona de confianza que cubrirá con una probabilidad prefijada (el nivel de confianza $(1 - \alpha)$) el valor esperado μ .

En esta zona o campo de confianza se recogerá la influencia de las diferencias casuales sobre el resultado de la medición.

Las diferencias sistemáticas conocidas se eliminan por medio de correcciones, las diferencias sistemáticas desconocidas se intenta recogerlas ampliando el campo de confianza.

El resultado definitivo de la medición, a partir de una serie de mediciones, estará formado por el promedio corregido según las diferencias sistemáticas conocidas, unido a un intervalo dentro del cual se encuentra presumiblemente el valor verdadero X_w de la magnitud medida. La diferencia entre el límite superior de dicho intervalo y el promedio corregido, o bien la diferencia entre el promedio corregido y el límite inferior de dicho intervalo, es lo que se denomina como incertidumbre de medición. Generalmente, aunque no siempre, ambas diferencias tienen el mismo valor.

Incertidumbre de medición se define como aquella parte del resultado que estima la longitud del intervalo dentro del cual se encuentra el valor verdadero de la magnitud a medir (mensurando).

Causas y clases de diferencias de medida

Cualquier valor de medida y cualquier resultado de la medición de una magnitud, se verán influenciados por la imperfección de los aparatos y equipos de medida, por el método de

medida, por el objeto a medir, por el medio ambiente, por el observador, existiendo variaciones temporales de dichas influencias.

Podemos citar diferencias fortuitas. Estas no son dominables y no están orientadas en un solo sentido.

También están las diferencias sistemáticas, conocidas por medio de la calibración de un equipo de medición. Estas pueden ser constantes y/o también variables en el tiempo.

Con estas diferencias se obtiene el valor corregido de una medición.

Existen diferencias sistemáticas desconocidas, cuya existencia se sospecha o resulta clara en base a experiencias.

Determinación aritmética de la dispersión aleatoria de los valores de medida de una serie de mediciones.

Promedio aritmético.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Dentro de una serie de mediciones n se miden independientemente, los valores X_1, X_2, X_3 bajo condiciones de repetición.

El promedio aritmético $\bar{X}$ es un valor estimado para el valor esperado μ .

Diferencia standard (empírica) S , coeficiente de variación v .

La magnitud de cálculo más importante para determinar numéricamente la dispersión ocasional o aleatoria de n valores individuales de una serie de mediciones en torno a su media $\bar{X}$ es la diferencia standard empírica S .

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$$

El cuadrado de la diferencia standard se denomina variación S^2 .

La diferencia standard S es la raíz positiva de S^2 y es un valor estimado para la diferencia standard σ .

También se emplea el coeficiente de variación V (empírico) y se expresa frecuentemente en %.

$$v = \frac{S}{\bar{X}}$$

Límite de confianza y campo de confianza para el valor esperado μ .

El promedio $\bar{X}$ no puede suponerse igual al valor esperado μ o al valor verdadero, aún cuando no existan diferencias sistemáticas, pero si se puede fijar una zona o un intervalo en torno al promedio corregido $\bar{X}$, según las diferencias sistemáticas conocidas que incluya con una probabilidad prefijada, nivel de desconfianza, $(1 - \alpha)$ el valor verdadero esperado. Los límites de este intervalo se denominan límites de confianza para el valor esperado y el intervalo, campo de confianza. Es necesario definir el nivel de confianza elegido en el campo de confianza.

Para nuestro caso, de no indicarse expresamente, el nivel de confianza empleado será 95%, ya que es de uso común en la industria y también a nivel de laboratorios.

Se supone siempre que los valores obtenidos proceden de una distribución normal y que se han obtenido con independencia unos de otros.

Límites de confianza y campo de confianza en el caso de diferencia standard desconocido σ

Según se mencionó anteriormente, lo que conocemos en la práctica suele ser la diferencia standard S (empírica) de una serie de mediciones con n valores individuales medidos.

En este caso los límites de confianza simétricos al promedio para el valor esperado μ vienen dados por:

Límite de confianza superior. $= \bar{X} + \frac{t}{\sqrt{n}} S$

Límite de confianza inferior. $= \bar{X} - \frac{t}{\sqrt{n}} S$

Donde t depende del nivel de confianza elegido $(1 - \alpha)$ y de la cantidad de valores n individuales.

Tabla Valores para t y $\frac{t}{\sqrt{n}}$ con distintos valores de del nivel de confianza $(1 - \alpha)$

Cantidad n de valores individuales	88,25%		95%		99,5%	
	t	$\frac{t}{\sqrt{n}}$	t	$\frac{t}{\sqrt{n}}$	t	$\frac{t}{\sqrt{n}}$
2	1,84	1,30	12,71	8,98	127,32	90,03
3	1,32	0,76	4,30	2,48	14,09	8,13
4	1,20	0,50	3,18	1,59	7,45	3,73
5	1,15	0,51	2,78	1,24	5,60	2,50
6	1,11	0,45	2,57	1,05	4,77	1,95
8	1,08	0,38	2,37	0,84	4,03	1,42
10	1,06	0,34	2,26	0,71	3,69	1,17
13	1,05	0,29	2,18	0,60	3,43	0,95
20	1,03	0,23	2,09	0,48	3,17	0,71
30	1,02	0,19	2,05	0,37	3,04	0,56
32	1,02	0,18	2,04	0,36	3,02	0,53
50	1,01	0,14	2,01	0,28	2,94	0,42
80	1,00	0,11	1,99	0,22	2,89	0,32
100	1,00	0,10	1,98	0,20	2,87	0,29
125	1,00	0,09	1,98	0,18	2,86	0,26
200	1,00	0,07	1,97	0,14	2,84	0,20
más de 200	1,00	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	1,96	$\frac{1,65}{\sqrt{n}}$	2,81	$\frac{2,81}{\sqrt{n}}$

$$\bar{x} - \frac{t}{\sqrt{n}} S \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{t}{\sqrt{n}} S$$

Incertidumbre de medición U

El resultado de medida obtenido a partir de una serie de mediciones, será el promedio corregido $\bar{X}$ según las diferencias sistemáticas conocidas, unido al intervalo dentro del cual se encuentra presumiblemente el valor de la magnitud medida.

La diferencia entre el límite superior de dicho intervalo y el promedio corregido, o bien la diferencia entre el promedio corregido y el límite inferior de dicho intervalo se denomina incertidumbre de medición U .

La amplitud total del intervalo dentro del cual se encuentra presumiblemente el valor verdadero de la magnitud medida, es decir la diferencia entre su límite superior e inferior no deberá denominarse como incertidumbre de medición.

La incertidumbre de medición consta de dos componentes. Una hace referencia a las diferencias aleatorias u ocasionales U_z y otra a las diferencias sistemáticas desconocidas U_s .

Si se trata de una serie de mediciones realizadas bajo condiciones de repetición, tendremos:

$$U_z = \frac{t}{\sqrt{n}} S$$

Esto es teniendo en cuenta que se trata de la mitad del ancho o extensión del campo de confianza para el valor esperado μ .

Existen también otros casos en que se conoce una diferencia standard de repetición σ_r

Esto sería utilizable en casos donde las repeticiones son con pocos valores.

$$U_z = \frac{t_\infty}{\sqrt{n}} \sigma_r$$

y para el caso en que se realiza una sola medición

$$U_z = t_\infty \sigma_r$$

Para el caso de la componente U_s , componente sistemática, ésta se obtiene en base a la práctica experimental.

La composición de ambas incertidumbres de medición U_s y U_z puede ser:

1° por adición lineal : $U = U_s + U_z$

2° por adición cuadrática: $U = \sqrt{U_s^2 + U_z^2}$

Si no pueden determinarse las diferencias sistemáticas desconocidas, deberá indicarse U como incertidumbre de medición y señalarse que se trabajará sólo teniendo en cuenta diferencias aleatorias.

Resultado de una medición

De una medición realizada bajo condiciones de repetición, obtenemos:

$\bar{X}$: promedio de una serie de mediciones.

U : incertidumbre de medición.

Necesitamos conocer también el valor de corrección K

Se define a K como el mismo valor que la diferencia sistemática comprobada, pero con signo contrario

$$Aa = K \qquad Aa = x_a - x_r \qquad \text{ó} \qquad Aa = \bar{x}_a - \bar{x}_r$$

$\bar{x}_a$: media aritmética de una cantidad de mediciones hechas con un instrumento.

x_r : es el valor considerado correcto.

Esto es porque x_w y μ son en principio desconocidos.

Aa : diferencia sistemática comprobada, denominada también como error.

$$\bar{x}_e = \bar{x} + k$$

de donde

$$Y = \bar{x}_e \pm U$$

Se parte del supuesto que la incertidumbre de medición es igual en ambos sentidos del intervalo.

Puede definirse la incertidumbre relativa de medición como:

$$\mathcal{E} = \frac{U}{\bar{x}_e}$$

$$Y = \bar{x}_e(1 \pm \mathcal{E})$$

Ejemplo de aplicación. Medición de una magnitud básica

Se necesita medir la longitud de una barra de 150 mm con un instrumento adecuado. El equipo utilizado tiene para dicho campo de medición una corrección

$K = + 0.06 \text{ mm.}$

Se realizaron 20 mediciones, $n= 20$ valores individuales. A partir de éstos calculamos la diferencia standard (empírica) S y los límites de confianza $1-\alpha = 95\%$

Medición Núm.:	Longitud X_i en mm	$10^2 (X_i - \bar{x})$ en mm	$10^4 (X_i - \bar{x})^2$ en mm^2
1	150.14	+ 12	144
2	150.04	+ 2	4
3	149.97	- 5	25
4	150.08	+ 6	36
5	149.93	- 9	81
6	149.99	- 3	9
7	150.13	+ 11	121
8	150.09	+ 7	49
9	149.89	- 13	169
10	150.01	- 1	1
11	149.99	- 3	9
12	150.04	+ 2	4
13	150.02	0	0
14	149.94	- 8	64
15	150.19	+ 17	289
16	149.93	- 9	81
17	150.09	+ 7	49
18	149.83	- 19	361
19	150.03	+ 1	1
20	150.07	+ 5	25
Σ	3000.40	0	1522

Promedio

$$\bar{x} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{1}{20} . 3000.40 \text{ mm} = 150,02 \text{ mm}$$

El valor promedio $\bar{x}$ debe corregirse con K .

$$\bar{x}_E = \bar{x} + K = 150.02 \text{ mm} + 0.06 \text{ mm} = 150.08 \text{ mm}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (x_i - 150.02)^2} = 0.09 \text{ mm}$$

Dado que hemos prefijado un nivel de confianza $(1 - \alpha) = 95\%$

$$\text{y } n = 20, t = 2.09 \quad \frac{t}{\sqrt{n}} = 0.48 \quad (\text{valores obtenidos de tabla})$$

El lím. inferior de confianza será:

$$X_E - \frac{t}{\sqrt{n}} s = 150.08 \text{ mm} - 0.48 \cdot 0.9 \text{ mm} = 150.04 \text{ mm}$$

Resultado de la medición

Dado que U tiene 2 componentes U_z (aleatorio) y U_s (sistemático), 0.04 mm representa la componente aleatoria. Si consideramos la componente U_s lo suficientemente pequeña como para apreciarla, el campo de confianza para el valor esperado se convertirá en el campo de confianza para el verdadero valor.

$$L = 150.08 \text{ mm} \pm 0.04 \text{ mm}$$

También puede indicarse el resultado de la medición con la incertidumbre relativa ε

$$\varepsilon = \frac{U}{\bar{x}_E} = 2.7 \cdot 10^{-4}$$

Por lo tanto:

$$L = 150.08 (1 \pm 0.0003) \text{ mm} = 150.08 (1 \pm 0.03 \%) \text{ mm}$$

Si el resultado de la medición Y se averigua de los valores medidos para varias cotas o medir iguales o distintas que están en relación funcional

$$Y = F(X_1, X_2, X_3, \dots, X_j, \dots, X_v)$$

$$U_y = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} U_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} U_{x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} U_{x_j}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_v} U_{x_v}\right)^2}$$

Por ej.: Si deseamos calcular el volumen de un prisma:

$$V = a.l.e$$

$$l = (200 \pm 0.1) \text{ mm} \quad SI = 0.1$$

$$e = (5 \pm 0.005) \text{ mm} \quad Se = 0.005$$

$$a = (15 \pm 0.05) \text{ mm} \quad Sa = 0.05$$

$$U_v = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial l} SI\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial a} Sa\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial e} Se\right)^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial l} = a.e = 75$$

$$\frac{\partial V}{\partial e} = a.l = 3000$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = l.e = 1000$$

$$U_v = \pm 52.74$$

$$V = 15000 \text{ mm}^3 \pm 52.74 \text{ mm}^3$$

ϵ = error relativo de cada parámetro

$$\epsilon l = \frac{0.1}{200} = 0.005$$

$$\epsilon e = \frac{0.005}{5} = 0.001$$

$$\epsilon a = \frac{0.05}{15} = 0.003$$

CONCLUSION

En toda medición debe tenerse en cuenta la incertidumbre asociada. Esto nos da idea de todas las variables que influyen en una determinación y también nos permite comparar mediciones realizadas por diferentes operadores en diferentes situaciones.